ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки
Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153
УДК 519.217

МОДЕЛИРОВАНИЕ МУЛЬТИСТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ НА МНОГООБРАЗИЯХ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ФИЛЬТРАЦИИ

© **Т. А. Аверина**[1,2], **К. А. Рыбаков**[3]

[1] ФГБУН «Институт вычислительной математики и математической геофизики» Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 6
[2] ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1
E-mail: ata@osmf.sscc.ru
[3] ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: rkoffice@mail.ru

Аннотация. В работе предлагается расширение класса стохастических динамических систем, траектории которых находятся на заданном многообразии, на мультиструктурные стохастические системы, а именно системы с переменной и случайной структурой. Рассматриваются вопросы описания таких систем и моделирования их траекторий в приложении к задачам анализа и фильтрации.
Ключевые слова: инвариантная стохастическая система; первый интеграл; система с переменной структурой; система со случайной структурой; случайный процесс; стохастическое дифференциальное уравнение; численный метод

Введение

В статье рассматриваются мультиструктурные стохастические системы на многообразиях. Мультиструктурные системы, или системы с переключениями режимов, возникают во многих прикладных областях [1], однако в отличие от других работ здесь предполагается, что траектории системы принадлежат многообразию, то есть для системы выполняется некоторый закон сохранения. Ранее рассматривались системы, структура которых фиксирована, с траекториями на заданном многообразии [2].

Идентификация моментов времени изменения структуры, или переключения режимов, в стохастических системах тесно связана с задачей о разладке, рассмотренной в работах А.Н. Колмогорова, Ю.В. Прохорова и А.Н. Ширяева [3, 4]. В этой статье основное внимание уделено вопросам моделирования траекторий систем с переключениями

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-00530) и базового проекта 0315-2016-0002.

режимов. Такие алгоритмы моделирования лежат в основе статистических методов анализа и фильтрации, поскольку и при решении задачи анализа, и при решении задачи фильтрации требуется моделировать ансамбль траекторий системы с их последующей статистической обработкой [5]. Предлагается модификация численных методов, которая обеспечивает принадлежность численного решения заданному многообразию (при использовании стандартных методов численное решение не принадлежит многообразию из-за погрешности [6]).

1. Основные понятия

Рассматривается модель динамической системы, заданная векторным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) Ито:

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — n-мерный вектор состояния; $t \in \mathrm{T} = [t_0, T]$ — время, моменты времени t_0 и T заданы; $f(t,x)$ — n-мерная вектор-функция, $\sigma(t,x)$ — $(n \times s)$-мерная матричная функция; $W(t)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс, $W(t)$ и $X_0 \in \mathbb{R}^n$ независимы. Согласно [2] $f_i(t,x), \sigma_{il}(t,x) \in C^{1,2}(\mathrm{T}\times\mathbb{R}^n)$, где $f_i(t,x)$ и $\sigma_{il}(t,x)$ — координаты вектор-функции $f(t,x)$ и элементы матричной функции $\sigma(t,x)$ соответственно; $i = 1,2,\ldots,n$; $l = 1,2,\ldots,s$.

Если скалярная неслучайная функция $M(t,x)$, не равная постоянной и имеющая непрерывную производную первого порядка по t и непрерывные производные первого и второго порядков по координатам вектора x, является первым интегралом для системы (1), то стохастический дифференциал случайного процесса $M(t,X(t))$ определяется формулой Ито и $dM\big(t,X(t)\big) = 0$. Таким образом, с вероятностью 1 на любой траектории решения СДУ (1) функция $M(t,x)$ принимает постоянное значение, зависящее только от X_0, и это означает, что траектории случайного процесса $X(t)$ принадлежат гладкому многообразию $M(t,x) = C = \mathrm{const}$.

Условия существования непрерывных частных производных функций $f_i(t,x)$, $\sigma_{il}(t,x)$ можно рассматривать не на всем множестве $\mathrm{T}\times\mathbb{R}^n$, а только в окрестности заданного многообразия.

Чтобы функция $M(t,x)$ была первым интегралом системы (1), необходимо и достаточно выполнение следующих условий на всех траекториях ее решения $X(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{il}(t,x)\frac{\partial M(t,x)}{\partial x_i} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,s; \tag{2}$$

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left[f_i(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}\frac{\partial \sigma_{il}(t,x)}{\partial x_j}\sigma_{jl}(t,x)\right]\frac{\partial M(t,x)}{\partial x_i} = 0. \tag{3}$$

Детальное изложение теории первых интегралов стохастических дифференциальных систем с примерами приведено в [2], некоторые аспекты численного моделирования траекторий таких инвариантных систем рассмотрены в [6].

2. Мультиструктурные системы на многообразиях

Представляет интерес расширение класса систем диффузионного типа (1) на системы с переменной и случайной структурой [1, 7, 8]. Для этого расширим вектор состояния, введя дополнительную координату $L \in \mathbb{L} = \{1, 2, \ldots, m\}$, определим случайный процесс $L(t)$ — процесс смены структуры (каждая структура соответствует некоторому режиму функционирования, $L(t_0) = L_0$), траектории которого — это кусочно-постоянные функции со значениями из множества $\mathbb{L}$, и зададим уравнение для случайного процесса $X(t)$ в форме

$$dX(t) = f^{\langle l \rangle}\big(t, X(t)\big)dt + \sigma^{\langle l \rangle}\big(t, X(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{4}$$

где $f^{\langle l \rangle}(t,x)$ — вектор-функция, $\sigma^{\langle l \rangle}(t,x)$ — матричная функция, удовлетворяющие условиям, аналогичным (2) и (3), $l = 1, 2, \ldots, m$. В общем случае каждой структуре может соответствовать свое гладкое многообразие $M^{\langle l \rangle}(t,x) = C^{\langle l \rangle} = \mathrm{const}$.

Процесс смены структуры $L(t)$ можно задать с помощью совокупности уравнений $S_{lr}(t,x) = 0$; $l, r = 1, 2, \ldots, m$; $l \neq r$. Тогда при условии $L(t-0) = l$ и достижении вектором X поверхности с уравнением $S_{lr}(t,x) = 0$ в момент времени t функция $L(t)$ принимает значение r. Такой тип смены структуры называется сосредоточенным переходом, а система (4) — системой с переменной структурой.

Другой вариант — задание функций $\lambda_{lr}(t,x) \geqslant 0$, определяющих интенсивности смены структуры; $l, r = 1, 2, \ldots, m$; $l \neq r$. Тогда при условии $L(t-0) = l$ и $X(t-0) = x$ функция $L(t+\Delta t)$ принимает значение r с вероятностью $\lambda_{lr}(t,x)\Delta t + o(\Delta t)$. Такой тип смены структуры называется распределенным переходом, а система (4) — системой со случайной структурой.

Отметим, что расширение класса стохастических дифференциальных систем, траектории которых находятся на заданном многообразии, на стохастические системы с переменной структурой, позволяет рассматривать не только гладкие, но и кусочно-гладкие многообразия, например, многогранники или образы многогранников, полученные с помощью гладких отображений. Для таких систем можно рассматривать все классические задачи теории управления — задачи синтеза и моделирования таких систем, анализа, фильтрации и прогнозирования.

3. Модифицированные численные методы моделирования траекторий мультиструктурных систем

Опишем модификацию численных методов решения СДУ, которая обеспечивает принадлежность численного решения заданному многообразию и может быть включена в базовые алгоритмы моделирования систем с переменной и случайной структурой, изложенные в [7, 8].

Пусть $\{t_k\}$ — равномерная сетка с заданным постоянным шагом h, определяющая разбиение отрезка времени $[t_0, T]$, $k = 1, \ldots, N$.

Обозначим через X_k численное решение СДУ (1) в момент времени t_k, полагая, что начальное значение численного решения совпадает с начальным значением задачи Коши, то есть $X_0 = X(t_0)$.

Запишем численный метод решения СДУ в общем виде

$$X_{k+1} = F(t_k, X_k, h), \tag{5}$$

где функция $F(t, X, h)$ определяется конкретным численным методом решения СДУ.

Опишем методику коррекции численного решения. Будем предполагать, что точка (t_k, X_k) принадлежит заданной поверхности, то есть $M(t_k, X_k) = C$. В следующем узле сетки t_{k+1} численное решение X_{k+1} условию $M(t_{k+1}, X_{k+1}) = C$ в общем случае не удовлетворяет из-за погрешности численного метода, то есть $M(t_{k+1}, X_{k+1}) = C' \neq C$.

Построим проекцию точки X_{k+1} на поверхность $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$. Найдем вектор нормали к поверхности $M(t, X) = C'$ в точке (t_{k+1}, X_{k+1}): $\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})$, и запишем параметрическое уравнение прямой в пространстве $\mathbb{R}^n$, проходящей через точку X_{k+1} с направляющим вектором $\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})$:

$$\chi(\alpha) = X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Остается найти точку пересечения прямой (6) и поверхности $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$ как решение системы

$$\begin{cases} \tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \\ M(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) = C. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что проекция $\tilde{X}_{k+1}$ точки X_{k+1} на поверхность $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$ определяется решением в общем случае нелинейного уравнения

$$M\big(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})\big) = C \tag{7}$$

относительно параметра α. Такое уравнение может иметь несколько решений, однако требуется найти α, соответствующее минимальному расстоянию между точками X_{k+1} и $\tilde{X}_{k+1}$ в смысле евклидовой метрики, то есть минимальному значению $|\alpha|$ из возможных. Таким образом,

$$\tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \tag{8}$$

где

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha} \big\{ |\alpha| \colon M\big(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})\big) = C \big\}.$$

Проекцию (8) следует находить на каждом шаге используемого численного метода решения СДУ, учитывая, что α^* — это функция точки (t, X). После чего эта проекция используется на следующем шаге, то есть вместо формулы (5) имеем

$$X_{k+1} = F(t_k, \tilde{X}_k, h) \tag{9}$$

и тогда $M(t_k, \tilde{X}_k) = C$, $k = 0, 1, \ldots, N$.

Модификация численных методов решения СДУ, описанная выше, может применяться и в общем случае, когда каждой структуре соответствует гладкое многообразие $M^{\langle l \rangle}(t, x) = C^{\langle l \rangle} = \mathrm{const}$. Такая модификация сокращает отклонение численного решения от заданной поверхности до нуля и может уменьшать погрешность численного метода в смысле сильной сходимости по абсолютной величине.

4. Примеры мультиструктурных систем на многообразиях

П р и м е р 1. Рассмотрим двумерную систему с тремя структурами, каждой из которых соответствует многообразие, являющееся также и поверхностью переключения ($n=2$, $m=3$), $t \in [0,5]$. Первая структура задается СДУ Ито

$$d\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{X_1(t)} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}X_1(t) + X_2(t) \\ -X_1(t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t/2}X_2(t) \\ -\mathrm{e}^{-t/2}X_1(t) \end{bmatrix} dW(t),$$

для второй и третьей структуры СДУ Ито имеют вид

$$d\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -X_1(t) \\ X_1(t) \end{bmatrix} dt + \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} dW(t),\ d\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} X_2(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dW(t),$$

Для первой структуры траектории случайного процесса $X(t) = [\, X_1(t)\ X_2(t)\,]^{\mathrm{T}}$ принадлежат конусу $M^{\langle 1\rangle}(t,x) = M^{\langle 1\rangle}(t,x_1,x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - t^2)/2 = C^{\langle 1\rangle}$, для второй и третьей структуры — плоскостям $M^{\langle 2\rangle}(t,x) = M^{\langle 2\rangle}(t,x_1,x_2) = x_1 + x_2 = C^{\langle 2\rangle}$ и $M^{\langle 3\rangle}(t,x) = M^{\langle 3\rangle}(t,x_1,x_2) = x_1 - x_2 = C^{\langle 3\rangle}$.

Начальный вектор состояния X_0 нулевой, а начальный номер структуры L_0 равен трем. Поверхности переключения заданы соотношениями $S_{12}(t,x) = M^{\langle 2\rangle}(t,x)$, $S_{23}(t,x) = M^{\langle 3\rangle}(t,x)$, $S_{31}(t,x) = M^{\langle 1\rangle}(t,x) - 1$, то есть $C^{\langle 1\rangle} = 1$, $C^{\langle 2\rangle} = C^{\langle 3\rangle} = 0$ и возможны следующие переходы: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$. Таким образом, траектория случайного процесса $X(t)$ в начальный момент времени начинается из нуля, ее фрагмент до первого момента переключения принадлежит биссекторной плоскости $x_1 - x_2 = 0$. Уравнение третьей структуры определяет неустойчивую систему, поэтому траектория удаляется от оси времени и в некоторый момент достигает конуса, происходит переключение режима $3 \to 1$. Далее до второго момента переключения фрагмент траектории принадлежит конусу. Затем происходит достижение траекторией другой биссекторной плоскости $x_1 + x_2 = 0$ и переключение режима $1 \to 2$. Следовательно, до третьего момента переключения соответствующий фрагмент траектории принадлежит этой плоскости. Уравнения второй структуры определяют асимптотически устойчивую систему, поэтому траектория приближается к оси времени и в некоторый момент времени достигает первой биссекторной плоскости, происходит переключение режима $2 \to 3$. Дальше процесс переключений повторяет описанную выше процедуру.

П р и м е р 2. Рассмотрим двумерную систему с двумя структурами, каждой из которых соответствует многообразие ($n = m = 2$), $t \in [0,1]$. Первая структура задается СДУ Ито

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t)\, dW(t),$$

а вторая структура СДУ Ито

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} X(t)\, dW(t),$$

где $X(t) = [\, X_1(t)\ X_2(t)\,]^{\mathrm{T}}$.

Для первой структуры траектории случайного процесса $X(t)$ принадлежат гиперболическому цилиндру $M^{\langle 1\rangle}(t,x) = M^{\langle 1\rangle}(t,x_1,x_2) = x_1\,x_2 = C^{\langle 1\rangle}$, для второй структуры — круговому цилиндру $M^{\langle 2\rangle}(t,x) = M^{\langle 2\rangle}(t,x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 = C^{\langle 2\rangle}$.

Начальный вектор состояния $X_0 = [\,1 \;\; 1\,]^{\mathrm{T}}$, а начальный номер структуры L_0 равен единице. Процесс смены структуры задается интенсивностями смены структуры: $\lambda_{12}(t,x) = \mathrm{e}^{-t}$, $\lambda_{21}(t,x) = 2$. Эти интенсивности задают показательные законы распределения времени между переключениями: $1 \to 2$, $2 \to 1$. Таким образом, траектория случайного процесса $X(t)$ в начальный момент времени начинается из точки X_0, ее фрагмент до первого момента переключения принадлежит гиперболическому цилиндру $x_1\,x_2 = C^{\langle 1\rangle}$. Через случайный промежуток времени, распределенный по показательному закону с параметром e^{-t}, происходит переключение режима $1 \to 2$. Далее до второго момента переключения фрагмент траектории принадлежит круговому цилиндру $x_1^2 + x_2^2 = C^{\langle 2\rangle}$. Через случайный промежуток времени, распределенный по показательному закону с параметром 2, происходит переключение режима $2 \to 1$. Дальше процесс переключений повторяется. Константы $C^{\langle 1\rangle}$ и $C^{\langle 2\rangle}$ определяются вектором состояния в моменты смены структуры, в начальный момент времени $C^{\langle 1\rangle}$ определяется начальным вектором состояния X_0: $C^{\langle 1\rangle} = 1$.

На рис. 1 и 2 приведены результаты численного моделирования траекторий для примеров 1 и 2 (по три выборочные траектории случайного процесса $X(t)$ в каждом примере и их проекции на фазовую плоскость; слева для примера 1, справа для примера 2).

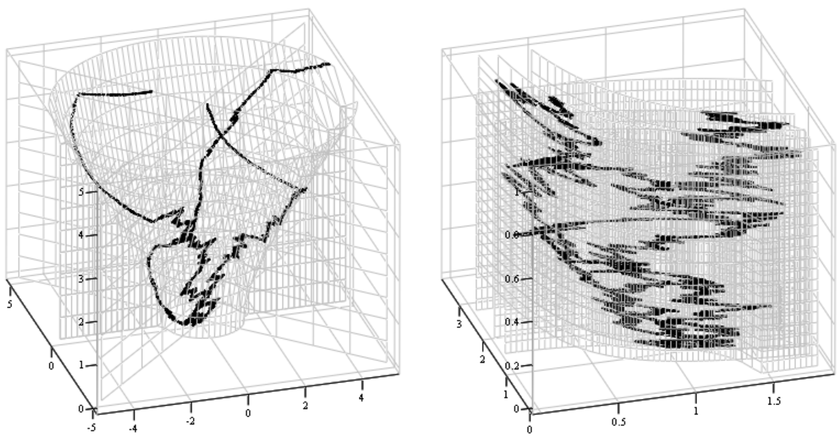

Рис. 1. Три выборочные траектории случайных процессов $X(t)$

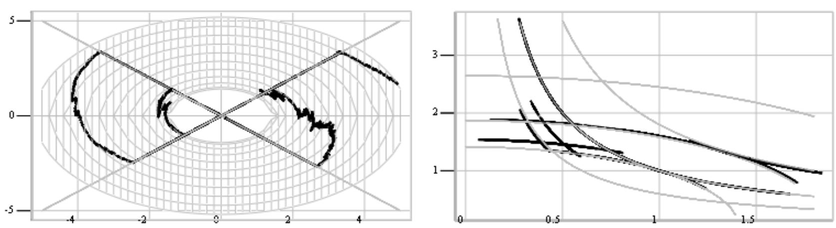

Рис. 2. Проекции траекторий случайных процессов $X(t)$ на фазовую плоскость

Для моделирования применялся обобщенный метод типа Розенброка [6] с шагом численного интегрирования $h = 10^{-4}$. Ось времени на рисунках расположена вертикально, на переднем плане — координата x_1, левее ее — координата x_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.

2. *Дубко В.А., Карачанская Е.В.* Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2013. 91 с.

3. *Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.В., Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические методы обнаружения спонтанно возникающих эффектов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 182. № 5. С. 4-23.

4. *Ширяев А.Н.* Стохастические задачи о разладке. М.: МЦНМО, 2016. 392 с.

5. *Рыбаков К.А.* Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017. 176 с.

6. *Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.* Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2018. Vol. 33. № 1. P. 1-13.

7. *Аверина Т.А.* Численный анализ систем управления динамическими объектами со случайными изменениями структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1023-1026.

8. *Аверина Т.А.* Построение и обоснование статистических алгоритмов моделирования решения систем со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 986-991.

Поступила в редакцию 22 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 25 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Аверина Татьяна Александровна, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация, доцент кафедры вычислительной математики, e-mail: ata@osmf.sscc.ru

Рыбаков Константин Александрович, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация, доцент кафедры математической кибернетики, e-mail: rkoffice@mail.ru

Для цитирования: *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Моделирование мультиструктурных систем на многообразиях в задачах статистического анализа и фильтрации // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 145–153. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153

MODELING OF MULTISTRUCTURAL SYSTEMS ON MANIFOLDS FOR STATISTICAL ANALYSIS AND FILTERING PROBLEMS

T. A. Averina[1,2], **K. A. Rybakov**[3]

[1] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch RAS
6 Lavrent'eva Ave., Novosibirsk 630090, Russian Federation
[2] Novosibirsk State University
1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russian Federation
E-mail: ata@osmf.sscc.ru
[3] Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe Hwy., Moscow 125993, Russian Federation
E-mail: rkoffice@mail.ru

Abstract. We propose an extension for the stochastic dynamical systems whose trajectories belong to a given manifold. This extension is the stochastic multistructural systems, namely the systems with a variable and random structure. The description for such systems are considered in application to analysis and filtering problems.
Keywords: invariant stochastic system; first integral; numerical method; random process; system with variable structure; system with random structure; stochastic differential equation

REFERENCES

1. Kazakov I.E., Artemev V.M., Bukhalev V.A. *Analiz sistem sluchaynoy struktury* [Analysis of Systems with Random Structure]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1993, 272 p. (In Russian).

2. Dubko V.A., *Karachanskaya E.V. Spetsial'nye razdely teorii stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy* [Special Chapters of the Theory of Stochastic Differential Equations]. Khabarovsk, Pacific National University, 2013, 91 p. (In Russian).

3. Kolmogorov A.N., Prokhorov Y.V., Shiryaev A.N. Veroyatnostno-statisticheskie metody obnaruzheniya spontanno voznikayushchikh effektov [Probabilistic-statistical methods of detecting spontaneously occurring effects]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1988, vol. 182, no. 5, pp. 4-23. (In Russian).

4. Shiryaev A.N. *Stokhasticheskie zadachi o razladke* [Stochastic Disorder Problems]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2016, 392 p. (In Russian).

5. Rybakov K.A. *Statisticheskie metody analiza i fil'tratsii v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh* [Statistical Methods of Analysis and Filtering for Continuous Stochastic Systems]. Moscow, Moscow Aviation Institute, 2017, 176 p. (In Russian).

6. Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A. Statistical analysis of diffusion systems with invariants. *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2018, vol. 33, no. 1, pp. 1-13.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-08-00530) and the base project 0315-2016-0002.

7. Averina T.A. Chislennyy analiz sistem upravleniya dinamicheskimi ob"ektami so sluchaynymi izmeneniyami struktury [Numerical analysis of multistructural control systems of dynamic objects]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 1023-1026. (In Russian).

8. Averina T.A. Postroenie i obosnovanie statisticheskikh algoritmov modelirovaniya resheniya sistem so sluchaynoy strukturoy, zadannoy stokhasticheskimi differentsial'nymi uravneniyami [Construction and justification of statistical algorithms for simulation of switching diffusion, given by stochastic differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 986-991. (In Russian).

Received 22 March 2018
Reviewed 25 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Averina Tatyana Aleksandrovna, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch RAS, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Novosibirsk State University, Novosibirsk, the Russian Federation, Associate Professor of the Computational Mathematics Department, e-mail: ata@osmf.sscc.ru

Rybakov Konstantin Aleksandrovich, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Cybernetics Department, e-mail: rkoffice@mail.ru

For citation: Averina T.A., Rybakov K.A. Modelirovanie mul'tistrukturnykh sistem na mnogoobraziyakh v zadachakh statisticheskogo analiza i fil'tratsii [Modeling of multistructural systems on manifolds for statistical analysis and filtering problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 145–153. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153 (In Russian, Abstr. in Engl.).